Simulação Computacional para Simulação de Transferência de Calor Utilizando Convolução

Trabalho de Fenômenos dos Transportes, Professora Adriana França

Nicolau Werneck - 9916164

17 de Março de 2003

1 Resumo

Foi desenvolvido um programa para simulação computacional de transferência de calor, e alguns sistemas foram implementados para ilustrar seu funcionamento. Foi explorada a resolução da equação de transferência resolvida como uma convolução de uma função de temperatura com uma gaussiana no espaço.

2 Desenvolvimento Matemático

Em simulações computacionais convém encontrar modelos para os sistemas que possam ser evoluídos no tempo de forma iterativa, ou seja, modelos em que o estado do sistema no instante de tempo seguinte possa ser calculado a partir do conhecimento do estado do sistema no instante atual.

O objetivo de nosso trabalho é implementar um modelo computacional para a equação de transferência de calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u$$

Para calcular as funções de temperatura em cada instante foi explorada uma interessante propriedade desta equação. Para ilustrar, vamos resolver a equação de calor em uma dimensão:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

A idéia é inicialmente utilizar a transformada de Fourier da função de calor no espaço. Aplicando a transformada nos dois lados, teremos:

$$\mathscr{F}\left\{\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\right\} = (j\omega)^2 \mathscr{F}\left\{u(x,t)\right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}U(\omega,t) = -\omega^2 U(\omega,t)$$

Esta equação diferencial de primeira ordem é facilmente resolvida:

$$U(\omega,t) = e^{-w^2 t} \times U(\omega,0)$$

Como uma multiplicação no domínio da freqüência equivale a uma convolução no tempo, precisamos achar a transformada inversa $g(x,t)$ de $e^{-\omega^2 t}$.

$$g(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega^2 t} e^{j\omega t} d\omega$$

Prova-se que a transformada de uma gaussiana não normalizada é:

$$e^{-\frac{1}{2}x^2\sigma^{-2}} \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} \sqrt{2\pi}\,\sigma\, e^{-\frac{1}{2}\omega^2\sigma^2}$$

e temos em nosso caso que $\sigma = \sqrt{2t}$, logo

$$g(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\, t}} \cdot e^{-\frac{1}{4}x^2/t}$$

que é uma gaussiana no espaço. É fácil de ver o que esta fórmula representa. A gaussiana vai atuar como um delta de Dirac que "escorreu" por um certo tempo. A variável do tempo atua como um fator de escala espacial concentrando ou dilatando a função ao redor do ponto central. Assim, quanto maior o tempo, mais espalhada vai ficar a função, representando que o calor chegou a uma distância maior.

A comparação com o delta de Dirac é para enfatizar que a área sob esta gaussiana é igual a um. Isto é muito importante porque significa que o princípio de conservação de energia será satisfeito, já que a integral da temperatura no espaço será igual após a convolução, e a temperatura é diretamente proporcional à energia.

3 Implementação

O programa foi desenvolvido para simular a seguinte situação:

- É preciso conhecer-se a função de temperatura sobre uma placa retangular de um certo material.

- Não há troca de temperatura pelas bordas do material.

- Podem existir regiões sobre a placa em que será introduzida potência que será dissipada no material.

- Pode estar havendo perda de calor por convecção para o ambiente.

O programa inicialmente define a matriz que será usada para fazer a convolução, que é uma gaussiana definida pela fórmula

$$S(\vec{x}) = e^{-\|\vec{x}\|^2/4\alpha\Delta t}$$

em que a difusividade térmica bidimensional é dada por $\alpha = k\,l/\rho\,C_p$, sendo l a espessura da placa simulada, e Δt é o tempo transcorrido entre cada iteração. A largura desta matriz é tal que o valor da função nas quatro menores distâncias até o centro é menor que 10^{-9}. O número de pontos da matriz também é sempre ímpar, para que exista um ponto correspontende ao centro da gaussiana. A matriz também é dividida por sua integral para que seu volume seja unitário, o que é importante para que seja obedecido o princípio da conservação de energia rigorosamente.

A seguir o programa define uma matriz de temperaturas com uma resolução definida no início, e entra em um laço infinito em que serão calculadas cada iteração.

A primeira coisa a ser feita em cada iteração é somar a energia que está sendo aplicada ao sistema. A seguir é feita a convolução da disperssão térmica, e são feitos ajustes relativos às condições de contorno dos limites espaciais do sistema. O último passo é relativo à simulação de perda de calor por convecção. Experimentando-se com o programa foi percebido que os intervalos de amostragem mais úteis não eram pequenos o suficiente para que a equação de Newton do resfriamento:

$$\frac{d\Theta}{dt} = -h\,\Theta$$

Fosse aproximada por uma simples multiplicação. Por isso foi implementada a solução desta equação diferencial,

$$\Theta(\Delta t) = \Theta(0) \cdot e^{-h\,\Delta t}$$

Os resultados são sempre melhores quanto mais Δt é feito menor, e neste caso a aproximação linear é possível. No entanto pode ser mais interessante reduzir os passos da simulação em alguns casos, e a exponencial faz a resposta ficar melhor.

O cálculo da energia a ser inserida no sistema pode ser feita de várias maneiras. Foram feitas como exemplo o aquecimento de uma placa em que uma certa região foi submetida temperaturas constantes, e também o funcionamento de um amplificador classe AB, em que uma certa quantidade de energia é dissipada por dois transistores individualmente. A energia liberada pelos transistores é calculada a partir da simulação do circuito do amplificador classe AB, e é somada à temperatura utilizando-se as devidas constantes de conversão.

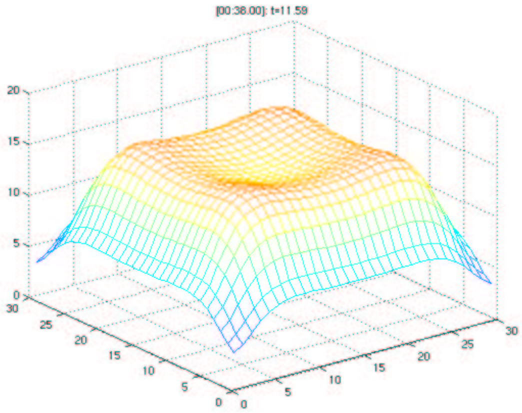
Para fazer com que a limitação de não haver troca de energia pelas bordas do sistema fosse obedecida, foi somada para dentro do sistema o que a convolução estava jogando para fora, como se houvesse um sistema idêntico espelhado no outro lado, impedindo a passagem de calor.

4 Simulações

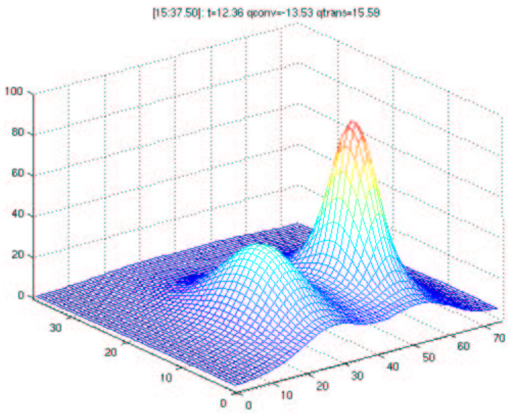
Foram simulados dois sistemas. Para ilustrar uma configuração em que pontos da placa são submetidos a uma temperatura constante, simulou-se um caso em que uma placa quadrada de um material fictício foi submetida inicialmente a uma temperatura de $20°$ em suas bordas, e após algum tempo voltou a ser submetida a 0 graus.

Para ilustrar um caso em que existem potências conhecidas entrando no sistema, foi simulada uma placa de alumínio a que estariam ligados dois transistores de um amplificador classe AB de 25 Watts emitindo uma onda senoidal com uma eficiência de aproximadamente 70%. Neste amplificador as partes positiva e negativa do sinal são amplificadas separadamente pelos dois transistores. Com uma freqüência suficientemente baixa, e uma freqüência de amostragem apropriada para a simulação, é possivel enxergar os dois transistores trabalhando separadamente.

Foi calculada a potência sendo entregue à placa e a potência sendo dissipada em cada instante. Para



Simulação da temperatura sobre uma placa submetida a temperaturas constantes em seu limite.



Simulação da temperatura do dissipador de um amplificador calsse AB.

calcular a potência dissipada subtraiu-se a temperatura antiga da instantânea logo após o cálculo da dissipação, e multiplicou-se essa diferença pelas constantes adequadas para que fosse encontrada a diferença total de energia, que foi então dividida por Δt para encontrar-se a potência média.

$$q_{conv} = \rho\, C_p\, l \sum_{x,y} u(\vec{x},t) - u(\vec{x},t-\Delta t)\frac{\Delta x^2}{\Delta t}$$

A simulação foi feita sob condições um pouco irreais, para que fosse possível mostrar a atuação separada dos transistores. Foi especificado um valor bastante elevado para a constante de convecção, e o sinal utilizado foi de uma freqüência muito baixa. Uma freqüência mais alta com menos conveção desequilibraria insignificativamente as temperaturas ao longo do tempo, e apenas dois picos seriam visíveis.

5 Conclusões

A técnica mostrou-se razoavelmente eficiente, e foi possível visualizar com sucesso as características dos sistemas que se esperava ver nas animações. Sistemas simulados com valores correspondentes aos reais para o alumínio pareceram bastante convincentes quanto às ordens de grandeza dos valores das temperaturas e do tempo da simulação. Foi verificado com sucesso que a temperatura média da placa não variou mais nos sistemas em que a potência sendo entregue era igual à potência sendo retirada por convecção.

Um dos inconvenientes do método é que o valor de $\alpha\,\Delta t$, que desempenha um papel semelhante ao número de Fourier, não pode ser muito grande para que o número de pontos significativos da gaussiana não fique grande demais com relação ao tamanho da placa.

Um fato interessante da técnica é que a transformada de Fourier foi descoberta estudando-se precisamente o problema da transferência de calor, e após isso tornou-se a ferramenta importante que é hoje para diversas outras áreas de estudo. Outro fato interressante é que a operação da convolução por gaussianas, apaesar de ter se mostrado aqui bastante eficiente além de intuitiva, é mais usualmente utilizada em computadores numa outra área: processamento de imagens. Diversos programas de edição de imagens fazem convoluções por gaussianas para suavizar ou ainda borrar imagens. Em geral programas de simulação deste tipo são feitos através de técnicas de diferenças finitas, que não exploram características intrínsecas das equações do modelo.

6 Bibliografia

[1]Lucas J. Van Vliet, Bernard Rieger e Piet W. Verbeek, Delft University of Technology, Holanda, *Fourier Transform of a Gaussian*, `http://www.ph.tn.tudelft.nl/~lucas`

[2]Palestra de autor desconhecido, North Carolina State University, E.U.A., `http://www4.ncsu.edu/eos/users/w/white/www/white/`

[3]Lang Moore, Duke University, *Fourier Transform I* (tutorial sobre aplicações da transformada de Fourier),

http://www.math.duke.edu/education/ccp/materials/engin/ftrans/